Foliazioni semiolomorfe e sottovarietà Levi piatte di una varietà complessa

Candidato: A. Perucca Relatore: Prof. G. Tomassini

RIASSUNTO DELLA TESI

Lo scopo di questo lavoro di tesi è stato presentare e discutere alcuni risultati ed esempi riguardanti le foliazioni semiolomorfe.
Le foliazioni semiolomorfe sono particolari sottoatlanti di una foliazione reale tali che le carte inducano coordinate complesse sulle foglie.
Dette $(y_1, \ldots, y_k)$ la coordinata trasversa e $(x_1, \ldots, x_{2n})$ la coordinata lungo la placca di una carta fogliata, consideriamo le coordinate complesse

$$(z_1, \ldots, z_n) = (x_1 + ix_2, \ldots, x_{2n-1} + ix_{2n}) .$$

Si richiede che i cambiamenti di coordinate siano della forma

$$\begin{cases} z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta, y_\beta) \\ y_\alpha = h_{\alpha\beta}(y_\beta) \end{cases}$$

dove la funzione $f_{\alpha\beta}$ è olomorfa rispetto a z_β.
Questa definizione si trova per la prima volta nell' articolo di C. Rea, Levi-flat Submanifolds and Holomorphic Extension of Foliations, del 1972.
Le foliazioni olomorfe sono un caso particolare ma il loro studio ha avuto uno sviluppo indipendente.
Non sempre esistono foliazioni semiolomorfe non banali: si ha esistenza nel caso in cui vi sia una foliazione reale di dimensione 2, ad esempio per S^3 su cui si ha la foliazione di Reeb. Su S^5 è stato recentemente dimostrato (L. Meersseman e A. Verjovsky) che esistono foliazioni semiolomorfe non banali.
Il 'caso immerso' delle foliazioni semiolomorfe è il seguente: foliazioni su una sottovarietà reale di una varietà complessa in cui le foglie hanno la struttura complessa indotta dall' ambiente.
L'attenzione si è concentrata sullo studio della foliazione di Levi e sulle sottovarietà Levi piatte. La foliazione di Levi si ottiene integrando (se esiste) la distribuzione di Levi, cioè la distribuzione che in ogni punto è costituita dai vettori nulli della forma di Levi. Nel caso in cui la sottovarietà reale sia

Levi piatta, la distribuzione di Levi coincide con il tangente olomorfo.
Lo studio delle foliazioni di Levi permette di ricavare informazioni sulla varietà complessa ambiente: un teorema di A. Milani e C. Rea collega l'esistenza di funzioni olomorfe non costanti su un intorno di un'ipersuperficie Levi piatta compatta con la compattezza delle foglie della foliazione di Levi.
È attuale l'interesse e lo studio delle sottovarietà Levi piatte, è aperto il problema della classificazione delle ipersuperfici Levi piatte compatte: in $\mathbb{C}^n$ esse sono totalmente reali; negli spazi proiettivi si congettura che esse siano totalmente reali e questo è noto per ogni dimensione a partire da una certa regolarità; nei tori complessi vi sono ipersuperficie Levi piatte non totalmente reali e si ha la classificazione di T.Ohsawa per i 2-tori complessi.
Abbiamo riportato il seguente risultato di D.E. Barrett: le ipersuperfici $\mathcal{C}^\infty$ Levi piatte, compatte e orientabili di una 2-varietà complessa hanno gruppo fondamentale infinito e, se non sono diffeomorfe ad $S^2 \times S^1$, hanno π_2 banale.
Abbiamo illustrato il problema dell'esistenza di ipersuperficie Levi piatte di $\mathbb{C}^2$ con bordo assegnato. Presentiamo i risultati di E. Bedford e G. Gaveau e di E.M. Chirka e N.V. Shcherbina: nel secondo caso descriviamo il modello geometrico utilizzato per studiare un dominio di $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Del modello viene proposta una generalizzazione valida per gli aperti di una ipersuperficie Levi piatta di $\mathbb{C}^n$, che potrebbe analogamente servire per trovare condizioni sufficienti affinché un dominio limitato dell'ipersuperficie sia l'intersezione dell'ipersuperficie con un aperto limitato e strettamente pseudoconvesso di $\mathbb{C}^n$.
Abbiamo inoltre dedotto il seguente corollario: consideriamo una funzione f di classe $\mathcal{C}^\infty$ da $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sia limitata superiormente o inferiormente e il cui grafico in $\mathbb{C}^2$ ammetta una foliazione semiolomorfa 'immersa' non banale, allora f non dipende dalla prima variabile.