# „Mathematik zum Anfassen“ Wanderausstellung des Mathematikums Gießen

## Dokumentation für Lehrer

Master in Secondary Education - Mathematics

UNIVERSITÉ DU LUXEMBOURG

Prof. Antonella Perucca
Jahrgang 2018: Eric Da Silva Brandao, Philippe Dieschburg, Jerry Hilgert, Deborah Stranen, Milko Todorovic, Florence Zeyen
Jahrgang 2019: Kim Freis, Alice Goedert, Christina Haack, Kelly Jost, Marc Thines

April 2018

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einführung

Dieses Dokument beschreibt die mathematische Wanderausstellung „Mathematik zum Anfassen“ des Mathematikum-Museums in Giessen

http://www.mathematikum.de

Die Ausstellung ist im Wesentlichen selbsterklärend. In diesem Text haben wir nützliche Informationen zu den Exponaten und deren Hintergrund für die Lehrer gesammelt.

In diesem Text benutzen wir den Begriff „Schüler“: Es versteht sich natürlich von selbst, dass dieser Text Schülerinnen genauso anspricht.

### Referenzen

Die Hauptreferenzen sind die Beschreibungen der Exponate in der Ausstellung und das Buch über die Exponate des Mathematikum-Museums

> Albrecht Beutelspacher: Wie man in eine Seifenblase schlüpft: Die Welt der Mathematik in 100 Experimenten. C.H.Beck, 11. September 2015.

Eine weitere gute allgemeine Quelle ist

https://de.wikiversity.org/wiki/OpenSource4School/Mathematik_zum_Anfassen

Wir haben auch mehrmals Informationen aus den entsprechenden Wikipedia Seiten übernommen. Weitere Referenzen haben wir in den einzelnen Kapiteln aufgelistet.

### Hinweise zur Ausstellung

Um alle Exponate richtig zu entdecken, brauchen Schüler sehr viel Zeit. Am besten ist es, sie einfach das machen zu lassen, was ihnen Spass macht.

Gruppenarbeit ist für viele Exponate geeignet und wird sogar empfohlen, um Zeit zu sparen. Der Vorteil einer Gruppenarbeit besteht auch darin, dass die Schüler ihre Überlegungen austauschen können.

*Wir wünschen Ihnen viel Vergnügen bei der Ausstellung und bitten Sie die gelösten Puzzles wieder auseinanderzubauen!*

## 2 Überblick

| Exponat | Dauer (Minuten) | Gruppenarbeit |
|---|---|---|
| Ich bin eine Funktion | 1 | ✓ |
| Körper zum Selberbauen | 10 | ✓ |
| Was alles in den Würfel passt | 10 | ✓ |
| Lights on! | 10 | ✓ |
| Der Turm von Ionah | 10 | ✓ |
| Wo geht's am schnellsten runter | 5 | ✓ |
| Die Leonardo-Brücke | 10 | ✓✓ |
| Die Riesenseifenhaut | 1 | ✗ |
| Wunderbare Seifenhäute | 10 | ✓ |
| Das Penrose-Parkett | >10 | ✓✓ |
| Wer findet den Fisch? | 5 | ✗ |
| Deutschlandtour | 5 | ✓ |
| Pythagoras zum Legen | 5 | ✓ |
| Das Spiegelbuch | 3 | ✗ |
| Die Smarties | 3 | ✓ |
| Wer kommt am weitesten raus? | 10 | ✓ |
| Die 2-er Pyramide | 5 | ✗ |
| Die 4-er Pyramide | 5 | ✗ |
| Das T-Puzzle | 5 | ✗ |
| Bunte Steine | 7 | ✗ |
| Das Quaderdreieck | 5 | ✗ |
| Conway-Cube | 5 | ✗ |
| 1 aus 10000 | 3 | ✗ |
| Die Würfelschlange | 7 | ✓✓ |
| Rote Würfel raus! | 5 | ✓✓ |
| Der Zweite ist immer der Erste | 7 | ✓✓ |
| Die Spiegelbuchstaben | 3 | ✗ |
| Der Geheimcode | 5 | ✗ |
| Mozart - Das musikalische Würfelspiel | 3 | ✓ |
| Mein Geburtstag in Pi | 1 | ✗ |
| Knack den Code! | >10 | ✓ |

| | |
|---|---|
| ✓ | Gruppenarbeit geeignet |
| ✓✓ | Gruppenarbeit erforderlich/empfohlen |
| ✗ | eher Einzelarbeit |

# 3 Ich bin eine Funktion

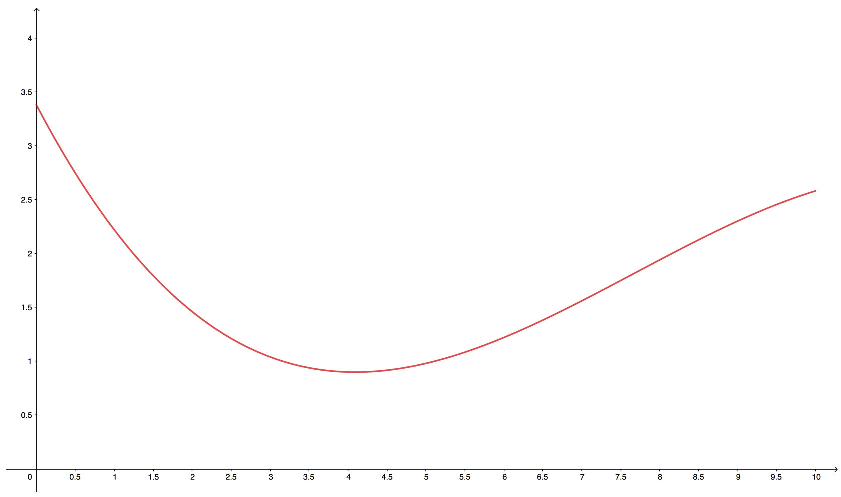
| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Funktionen, Weg-Zeit Diagramme |
| **Beschreibung** | Das Exponat besteht aus:<br>• Einem Bildschirm, auf dem eine weiße Kurve in einem Koordinatensystem abgebildet ist. Insbesondere findet man ein Weg-Zeit Diagramm auf dem Bildschirm wieder.<br>• Einem roten Teppich, auf dem eine 4 Meter lange Strecke abgebildet ist.<br>• Einem Kasten mit einer Fotozelle, die die Position des Schülers erfasst.<br><br>Auf dem vorhandenen Bildschirm erscheint eine weiße Kurve in einem Koordinatensystem. Der Schüler soll sich auf der 4 Meter langen Strecke vor- und zurückbewegen (nicht rennen!). Dabei wird gleichzeitig seine Position durch die Fotozelle erfasst. Dadurch entsteht eine zweite gelbe Kurve, die in jedem Zeitpunkt anzeigt, wie groß der Abstand des Schülers zu dem Kasten mit dem Bildschirm ist. Das Experiment dauert 10 Sekunden.<br>Die Aufgabe besteht darin, dass der Schüler die zweite Kurve durch seine eigene Bewegung zeichnet, sodass diese der vorgegebenen Kurve möglichst genau ähnelt.<br>Es ist möglich, dieses Exponat in Form einer Gruppenarbeit zu entdecken, indem außenstehende Schüler die Bewegung des Experimentators bestimmen. |

### Strategie

Um die vorgegebene Aufgabe erfolgreich zu lösen, genügt es, dass die Schüler den Zusammenhang zwischen der Art und Weise ihrer eigenen Bewegung *und* den Eigenschaften der Kurve intuitiv erkennen und verstehen.

**Beispiel**

Nehmen wir an, dass ein Schüler das folgende Weg-Zeit-Diagramm durch seine eigene Bewegung gezeichnet hat:




Am Anfang ($t = 0$) stand der Schüler ungefähr 3.3 Meter vor dem Bildschirm. Während $0 < t < 4.1$ hat er sich dem Bildschirm genähert bis er sich 0.9 Meter vor dem Bildschirm befand. Während $t > 4.1$ hat er sich wieder vom Bildschirm entfernt bis er 2.6 Meter zum Zeitpunkt $t = 10$ vor dem Bildschirm stand.

**Mathematik**

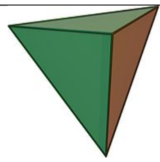
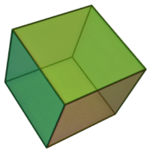
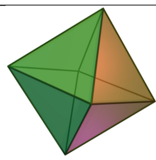
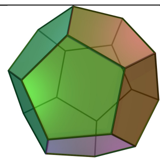
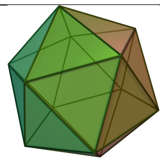
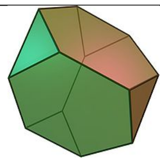
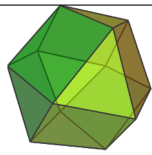
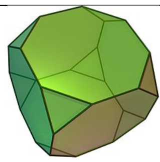
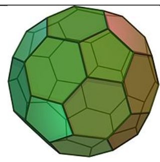
Es ist für den Schüler bei diesem Exponat nur möglich, stetige Funktionen (von beschränkter Variation) darzustellen. Die Werte der Funktion sind zwischen 0 und 4 (die Einheit entspricht einem Meter). Der Definitionsbereich ist das Intervall $[0, 10]$ (die Einheit entspricht einer Sekunde).

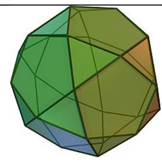
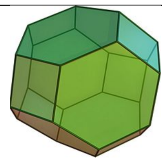
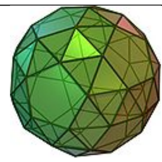
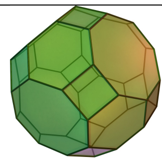
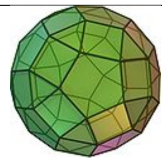
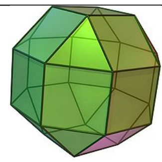
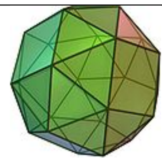
| *Eigenschaft der Kurve* | *Art und Weise der Bewegung* | *Eigenschaft der Funktion* |
|---|---|---|
| waagerechte Linie | still stehen | konstante Funktion |
| zeigt nach oben | rückwärtsgehen | steigend |
| zeigt nach unten | vorwärtsgehen | fallend |
| zeigt steil nach oben | schnell rückwärtsgehen | große Steigung |
| zeigt steil nach unten | schnell vorwärtsgehen | starkes Gefälle |
| Hochpunkt | Wechsel von Rückwärts- zu Vorwärtsbewegung | Maximum |
| Tiefpunkt | Wechsel von Vorwärts- zu Rückwärtsbewegung | Minimum |
| Kurve ganz unten | man befindet sich ganz vorne bei der Marke 0 | Nullstelle |
| Kurve ganz oben | man befindet sich ganz hinten bei der Marke 4 | Viererstelle |

# 4 Körper zum Selberbauen

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Geometrische Körper |
| **Beschreibung** | Das Exponat besteht aus einem Tisch, auf dem geometrische Bauteile (unter anderem: Dreiecke, Quadrate, Fünfecke und Sechsecke) liegen.<br>Die Aufgabe besteht darin, dass die Schüler diese Bauteile zu verschiedene geometrische Körper zusammensetzen können. Hier sind der Phantasie keine Grenzen gesetzt. |

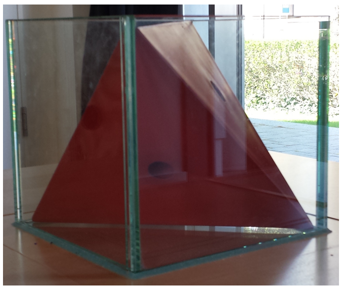
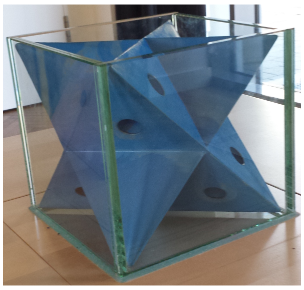
In der folgenden Tabelle sind Körper aufgelistet, die mathematisch interessant sind und gebaut werden können (insbesondere alle Platonische Körper):

| Name des Körpers | besteht aus | Bild |
|---|---|---|
| **Tetraeder** | 4 Dreiecken |  |
| **Hexaeder/Würfel** | 6 Quadraten |  |
| **Oktaeder** | 8 Dreiecken |  |
| **Dodekaeder** | 12 Fünfecken |  |
| **Ikosaeder** | 20 Dreiecken |  |
| **Tetraederstumpf** | 4 Sechsecken,4 Dreiecken |  |
| **Kuboktaeder** | 6 Quadraten, 8 Dreiecken |  |
| **Würfelstumpf** | 6 Achtecken, 8 Dreiecken |  |
| **Ikosaederstumpf** | 12 Fünfecken, 20 Sechsecken |  |

| | | |
|---|---|---|
| **Ikosidodekaeder** | 20 Dreiecken,12 Fünfecken |  |
| **Oktaederstumpf** | 6 Quadraten,8 Sechsecken |  |
| **abgeschrägtes Dodekaeder** | 80 Dreiecken, 12 Fünfecken |  |
| **Kuboktaederstumpf** | 12 Quadraten, 8 Sechsecken, 6 Achtecken |  |
| **Rhombenikosidodekaeder** | 20 Dreiecken, 30 Quadraten, 12 Fünfecken |  |
| **Rhombenkuboktaeder** | 8 Dreiecken, 18 Quadraten |  |
| **abgeschrägtes Hexaeder** | 32 Dreiecken, 6 Quadraten |  |

# 5 Was alles in den Würfel passt

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Räumliches Denken mit geometrischen Körpern |
| **Beschreibung** | Das Exponat besteht aus einem Glaswürfel, der oben offen ist, und daneben befinden sich drei Körper, die auf den ersten Blick größer als den Würfel scheinen:<br>• Tetraeder<br>• Achteckiger Stern (Verschmelzung zweier Tetraeder)<br>• Oktaederstumpf (Abstumpfung der sechs Ecken eines Oktaeders)<br>Die drei oben genannten Körper müssen nacheinander in den Würfel eingepasst werden. Die Schüler müssen sich also überlegen, wie sie die verschiedenen Körper drehen und halten müssen damit diese vollständig in den Würfel hinein passen. |


### Hinweis

Hält man eine Kante des Tetraeders genau auf die Diagonale des oberen Quadrats des Würfels, dann passt das Tetraeder genau in den Würfel. Die beiden anderen Körper passen nach dem gleichen Prinzip in den Würfel.
Anmerkung: Das Tetraeder ist kleiner als der Stern, und wenn man diesen schon in den Würfel eingepasst hat, kann man die Lösung für das Tetraeder nachvollziehen.

- An jeder der sechs Seitenflächen des Würfels liegt genau eine der sechs Kanten des Tetraeders. Die vier Ecken des Tetraeders nehmen nur vier von den insgesamt acht Ecken des Würfels ein.

- Im Falle des Sterns, nehmen die acht Ecken des Sterns die acht Ecken des Würfels ein.

### Aufgabe

*Das Tetraeder nimmt genau ein Drittel des Würfelvolumens ein.*

*Lösung:* Zuerst bezeichnet man die Kantenlänge des Würfels mit $a$ und deshalb beträgt das Würfelvolumen $a^3$. Die vier freien Teilräume des Würfels sind vier unregelmäßige Pyramiden: die Grundseite der Pyramide ist halb so lang wie eine Quadratseite, und die Länge der Höhe der Pyramide beträgt $a$. Daher beträgt die Grundfläche der Pyramide $\frac{a^2}{2}$. Das Volumen einer Pyramide ist

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}\,,$$

also beträgt das Volumen des Tetraeders

$$a^3 - 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot a^3 = \frac{1}{3} \cdot a^3\,.$$

# 6 Lights on!

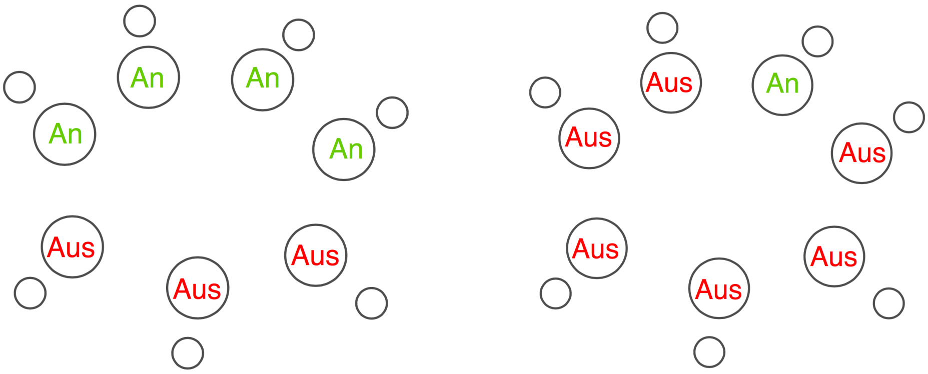
| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Kombinatorik<br>Lineare Algebra |
| **Beschreibung** | Das Exponat besteht aus einem Tisch, auf dem man sieben im Kreis angeordnete Lampen und sieben den Lampen zugeordnete Schalter wiederfindet. Die Lampen können entweder an oder aus sein. Jedoch sind nicht unbedingt alle Lampen gleichzeitig an oder aus. Dadurch findet der Schüler einen beliebigen Ausgangszustand der Lampen am Anfang des Experimentes wieder. Wenn man jedoch einen der sieben Schalter betätigt, ändert die dazugehörige Lampe, sowie die links und rechts daneben liegende, ihren Zustand von an zu aus oder umgekehrt. |

### Strategie

Während einige Schüler versuchen eine Strategie zu entwickeln, stürzen sich andere Schüler ohne eine bestimmte Strategie auf das Experiment, in der Hoffnung, die Lösung zufällig zu finden.
Die Schüler können die Schalter der Lampen so betätigen, dass sie eine der folgenden zwei Situationen wiederfinden:

- 4 nacheinanderfolgende Lampen sind an, und die anderen 3 Lampen sind aus (es reicht eine Schalterbetätigung).
- 1 Lampe ist an, und die 6 anderen Lampen sind aus (es reichen zwei Schalterbetätigungen).
- alle Lampen sind aus (es reicht, alle sieben Schalter zu betätigen).

Jeder Schalter einer bestimmten Lampe muss höchstens einmal betätigt werden, da man den Anfangszustand der Lampe vorfindet, wenn man den gleichen Schalter zweimal betätigt. Die höchstmögliche Anzahl an gedrückten Schaltern während eines Versuches lautet daher 7 (zu dieser Anzahl an Schalterbetätigungen kommt es, wenn alle 7 Lampen zu Beginn des Experiments aus sind).




**Mathematik**

Es gibt einen Zusammenhang zur Linearen Algebra. Es gibt nur zwei mögliche Zustände der Lampen: «an» und «aus». Der Zustand «an» wird als «1» kodiert und der Zustand «aus» als «0» kodiert. Da dieses Exponat 7 Lampen beinhaltet, die wir von $a$ bis $g$ definieren, kann der Zustand der 7 Lampen als ein $7 \times 1$ Vektor beschrieben werden: die Zustände der 7 Lampen sind die Elemente des 7-dimensionalen Vektorraums $V$ über dem Körper mit zwei Elementen. Auch ohne diesen Körper zu erwähnen, muss man nur folgende Operationen verstehen:

- $0 + 0 = 0$
- $1 + 0 = 0 + 1 = 1$
- $1 + 1 = 0$

Wenn alle Lampe aus sind, und man den Schalter der Lampe $c$ betätigt, ändert sich der Zustand der Lampe $c$ und auch der Zustand der danebenliegenden Lampen $b$ und $d$. Wir haben daher die folgende Operation vollzogen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wenn wir jetzt den Schalter der Lampe $d$ betätigen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schlussendlich sind die Lampen $b$ und $e$ an, und die übrigen Lampen sind aus.

Welche Schalter muss man betätigen, damit alle Lampen leuchten? Wenn der Anfangssituation durch den Vektor mit Koordinaten $a$ bis $g$ beschrieben wird, und die Endsituation durch den Vektor mit allen Koordinaten 1, stellt sich die Frage: Welche der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \sigma$ sind 1 und welche 0, sodass die folgende Gleichung stimmt?

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{pmatrix} + \alpha \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+\mu \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wenn zum Beispiel $\lambda = 1$, bedeutet dies, dass der zugeordnete Schalter der Lampe $e$ einmal betätigt wurde.

Um nun die genauen Werte von $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \sigma$ in einer konkreten Ausgangssituation $(a, b, c, d, e, f, g)$ zu bestimmen, muss man das folgende lineare Gleichungssystem lösen:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \sigma = 1 - a \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 - b \\ \beta + \gamma + \delta = 1 - c \\ \gamma + \delta + \lambda = 1 - d \\ \delta + \lambda + \mu = 1 - e \\ \lambda + \mu + \sigma = 1 - f \\ \mu + \sigma + \alpha = 1 - g \end{cases}$$

Die Lösung des Gleichungssystems sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{cases} \alpha = 1 - (a + b + d + e + g) \\ \beta = 1 - (a + b + c + e + f) \\ \gamma = 1 - (b + c + d + f + g) \\ \delta = 1 - (a + c + d + e + g) \\ \lambda = 1 - (a + b + d + e + f) \\ \mu = 1 - (b + c + e + f + g) \\ \sigma = 1 - (a + c + d + f + g) \end{cases}$$

Für die Schüler, die kein Vorwissen über Vektoren und lineare Gleichungssyteme haben, kann man die Zustände der Lampen als Folgen von Bits darstellen.

### Quellen

- `https://wiki.zum.de/wiki/Mathe.Forscher_am_GaK/Lights_on!`

# 7 Der Turm von Ionah

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Kombinatorik<br>Induktionsprinzip |
| **Beschreibung** | Das Exponat besteht aus fünf kreisförmigen Scheiben, die jeweils unterschiedliche Größen besitzen. Dabei handelt es sich abwechselnd um rote und blaue Scheiben. Des Weiteren besteht das Exponat aus einem Tisch mit drei gleichgearteten trichterförmigen Löchern, wo alle Scheiben hinein passen. Die kleinste Scheibe gehört nach ganz unten, und die größte Scheibe nach ganz oben.<br>Zu Beginn des Experiments liegen alle Scheiben in demselben Loch: dadurch bilden die fünf Scheiben einen nach unten gerichteten Turm. Die Aufgabe besteht darin, den Turm in eines der zwei anderen Löcher umzusetzen.<br>• Es darf immer nur eine Scheibe bewegt werden.<br>• Es darf nie eine kleinere Scheibe auf einer größeren Scheibe liegen. |

### Strategie

Die Strategie bei diesem Exponat besteht darin, dass die Schüler nie zwei gleichfarbige Scheiben übereinander legen sollen. Die Schüler sollten zuerst die Anzahl an 3 Scheiben reduzieren (man benötigt dafür 7 statt 31 Züge).

### Beispiele

- 2-*Scheiben-Problem*: Nehmen wir an, dass die zwei vorhandenen Scheiben im Trichter A sind. Wir legen zunächst die oberste Scheibe von A nach C und dann die zweite Scheibe von A nach B. Schließlich müssen wir nur noch die große Scheibe von C nach B legen, sodass sich der Turm nun im Trichter B befindet. Insgesamt benötigten wir drei Züge.
- 3-*Scheiben-Problem*: Nehmen wir an, dass die drei vorhandenen Scheiben im Trichter A sind. Wir legen zunächst die oberste (d.h. die größte) Scheibe von A nach B und dann die zweite (d.h. die mittlere) Scheibe von A nach C. Daraufhin legen wir die größte von B nach C und dann die unterste (d.h. die kleinste) Scheibe von A nach B. Schließlich legen wir die oberste Scheibe von C nach A, die mittlere von C nach B und dann die größte von A nach B. Insgesamt benötigten wir sieben Züge.

### Historischer Hintergrund

Dieses Exponat ist eine Variante von «Der Turm von Hanoi»: dessen Scheiben sind so geordnet, dass die größere unten und die kleineren oben liegen («Ionah» ist das Wort «Hanoi», von hinten nach vorne gelesen).

### Mathematik

Das Induktionsprinzip ist der mathematische Teil, der hinter diesem Exponat steckt. Dank des Induktionsprinzips, kann man die folgende verallgemeinerte Aussage mit $n$ Scheiben beweisen:

*Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Für das Umsetzen von $n$ Scheiben benötigt man $2^n - 1$ Züge.*

*Beweis:* Der Induktionsanfang (2-Scheiben-Problem) wurde schon analysiert. Für den Induktionsschritt ($n \rightsquigarrow n+1$) wissen wir, dass man für das Umsetzen von $n$ Scheiben $2^n - 1$ Züge benötigt. Nehmen wir an, dass alle $(n+1)$ vorhandenen Scheiben im Trichter A sind. Um die $(n+1)$ Scheiben umzusetzen, legen wir zunächst die $n$ obersten Scheiben von A nach C ($2^n - 1$ Züge). Dann legen wir die unterste Scheibe von A nach B. Schließlich legen wir (wieder mit $2^n - 1$ Zügen) die obersten $n$ Scheiben von C nach B. Insgesamt ist die Anzahl der Züge $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$.

### Quellen


- `http://www.erlebnisland-mathematik.de/ausstellung/vertiefungstexte/turm-von-ionah/`

# 8 Wo geht's am schnellsten runter?

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Kurventheorie<br>Physik |
| **Beschreibung** | Das Exponat besteht aus drei Kugelbahnen: eine geradlinige Bahn und zwei identisch gebogene Bahnen (Brachystochrone), die am Anfang steil abfallen und am Ende flach auslaufen.<br><br>1. Die erste Aufgabe besteht darin, eine Kugel auf der geraden Bahn und eine Kugel auf einer der gebogenen Bahnen gleichzeitig starten zu lassen. Das Ziel ist es zu erkennen, dass die Kugel auf der Brachystochrone mehr Schwung als die auf der geraden Bahn erhält und somit als erste ins Ziel rollt. „Der kürzeste Weg ist nicht immer der schnellste!“<br><br>2. Die Schüler legen je eine Kugel auf je eine der beiden Brachystochrone an zwei unterschiedlichen Höhen, und sollen feststellen, dass die Kugeln gleichzeitig ins Ziel rollen. |

### Physik

Vor dem Start, sind die Kugeln regungslos und besitzen aus diesem Grund ihre maximale potentielle Energie. Durch die Erdanziehung werden beide Kugel während ihres Laufs immer schneller, bis sie beim Zieleinlauf ihre maximale Geschwindigkeit erreicht haben. Diese Maximalgeschwindigkeit ist bei beiden gleich, da an dieser Stelle jeweils die gesamte potentielle Energie vom Anfang in Bewegungsenergie umgewandelt ist. Aber die Kugel auf der gekrümmten Bahn nimmt viel schneller an Geschwindigkeit zu (die Beschleunigung ist größer).

### Mathematik

*Eine Brachystochrone ist die Bahn zwischen einem Anfangs- und einem gleich hoch oder tiefer gelegenen Endpunkt, auf der ein sich reibungsfrei bewegender*

*Massenpunkt unter dem Einfluss der Gravitationskraft am schnellsten zum Endpunkt gleitet.*

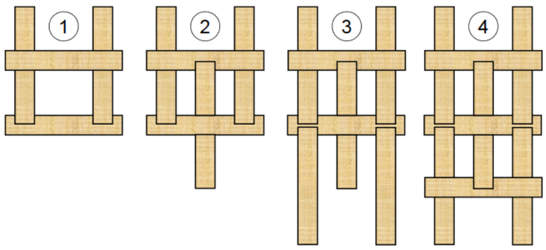
Die Brachystochrone hat noch eine weitere Eigenschaft: *Die Kugel benötigt, unabhängig an welcher Stelle der Brachystochrone man sie loslässt, die gleiche Zeit um ins Ziel zu gelangen.* Aus diesem Grund ist Kurve gleichzeitig eine „Tautochrone“.
*Die Brachystochrone ist Teil der „Zykloide“* d.h. der Bahnkurve eines Kreispunktes beim Abrollen des Kreises auf einer Geraden.

# 9 Die Leonardo-Brücke

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Kurven<br>Physik (Statik) |
| **Beschreibung** | Man soll eine Brücke nur mithilfe von gleichen flachen Holzstäben bauen (ohne jegliche Befestigungsmittel). Gruppenarbeit erforderlich! |

**Strategie**

Wie man für den Bau einer Leonardo-Brücke mit 8 Hölzern vorgeht, wird anhand der folgenden Schemata beschrieben:




Um die Brücke weiter auszubauen, hebt man den gebauten Teil der Brücke an und beginnt nun wieder bei Schritt 1. Durch das Hinzufügen von 5 weiteren Holzstäben wird die Spannweite der Brücke vergrößert.

**Historischer Hintergrund**

Die Leonardo-Brücke (erfunden von Leonardo Da Vinci) bestand ursprünglich aus leicht transportablen Rundstäben und Seilen und sollte dem Militär ermöglichen, schnell Hindernisse zu überwinden.

## Mathematik

Das Bauprinzip der Leonardo-Brücke verwendet den sogenannten Selbsthemmungsmechanismus, bei dem die Struktur sich selbst befestigt, wenn eine Belastung stattfindet. Sie ist eine selbsttragende Konstruktion, das heißt ein Gebilde, das in sich stabil ist. Unverzichtbar für die selbsttragende Eigenschaft sind die Querhölzer (die Holzstäbe bilden insgesamt eine Art Geflecht).

Je rauer die Hölzer, desto besser wird der Brückenbogen gefestigt, da durch die Rauheit der Holzstäbe ein Rutschen weitestgehend verhindert wird.

Man findet dasselbe Prinzip beim Bau von steinernen Kellergewölben, sowie beim Zusammenklappen von Umzugskartons.

Die kleinstmögliche Leonardo-Brücke kann mit nur 6 Leisten gebaut werden und mit jeweils 4 Leisten verlängert werden. Diese ist dann aber auch weniger stabil.

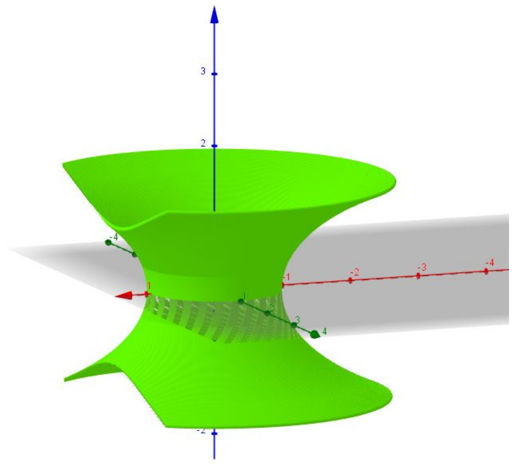
Die übliche Leonardo-Brücke ist sehr stabil gegen Belastungen von oben, reagiert allerdings empfindlich gegen seitliche Belastungen. Um also im realen Leben eine große Leonardo-Brücke zu bauen, muss man die Leisten noch zusätzlich mit Nägeln oder anderen Befestigungsmitteln verbinden, um seitliche Verschiebungen zu verhindern.

## Quellen


- Die Leonardo-Brücke, Seminar „Mathematik zum Anfassen“: `https://www.mathematik.de/images/Blog/Dokumente/Mathe_im_Leben/LeonardobrueckeUniGraz2009.pdf`
- Das obige Bild: `https://www.thwcloud.de/idool/index.php/Datei:Leonardobr%C3%BCcke1.jpg`

# 10 Die Riesenseifenhaut

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Minimalflächen |
| **Beschreibung** | Man muss einen Seifentunnel bilden, indem man zwei Kreise *langsam* auseinanderzieht (Tipp: nicht bis ganz oben ziehen, so bekommt man eine stabilere Form). Man erzeugt ein Katenoid. |



### Historischer Hintergrund

Leonhard Euler hat herausgefunden, dass ein *Katenoid* (siehe das obige Bild) eine Minimalfläche ist. Im Alltag sind Katenoiden unter anderem in der Architektur wiederzufinden.
Wenn man schon mit Seifenhäuten gespielt hat, dann weiß man, dass diese Minimalflächen bilden. In unserem Fall ist die Minimalfläche durch eine Katenoidenform gegeben, da sie rotationssymmetrisch sein muss, und durch zwei parallele Kreisen begränzt ist.

*Was ist ein Katenoid?* Es ist die Rotationsfläche einer Kettenlinie.
*Was ist eine Kettenlinie?* Wenn man eine Kette an den zwei Spitzen haltet und die Kette hängen lässt, dann bekommt man eine Kettenlinie.

### Mathematik

Die Kettenlinie in der Ebene kann folgendermaßen parametrisiert werden:

$$y = c \cdot \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

wobei $c \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Konstante ist. Das Katenoid kann folgenderweise parametrisiert werden:

$$\begin{aligned}
&x = c \cdot \cosh\left(\frac{v}{c}\right)\cos(u)\\
&y = c \cdot \cosh\left(\frac{v}{c}\right)\sin(u)\\
&z = v\\
&u \in [0, 2\pi)\,, v \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Und in den Zylinderkoordinaten um die Symmetrieachse $z$:

$$\rho = c \cdot \cosh\left(\frac{z}{c}\right)$$

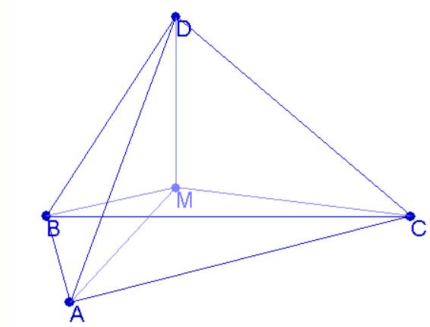
### Quellen


- `http://www.igt.uni-stuttgart.de/LstGeo/Semmelmann/Diplomarbeiten/jacobi.pdf`
- `http://www.bilder-der-mathematik.de/picturebook/pages/picturebook_pages_154_155.pdf`
- `http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsvii/cms/media/beispiele/Anwendung2.pdf`

# 11 Wunderbare Seifenhäute

| | |
|---|---|
| Themenbereich | Minimalflächen, geometrische Formen |
| Beschreibung | Metallformen aus einer Seifenmischung herausziehen: man produziert (normalerweise) Minimalflächen. |

Eine Minimalfläche ist eine Fläche im Raum, die *lokal* minimalen Flächeninhalt hat, d.h. kleine Änderungen an der Fläche vergrößern den Flächeninhalt. Minimalfläche mit einem gegebenen Rand zu bestimmen heißt in der Mathematik: *Plateau-Problem.*
Seifenhäute bilden oft Minimalfläche, da die Dichte der Seife pro Flächeneinheit höher wird. Dies ermöglicht eine Ausdehnung der Seifenhaut bei Störungen, wie z.B. Luft oder Druck.




Tauche den Würfelrahmen einmal ganz schnell und einmal ganz langsam in die gegebene Lösung: Oft beobachtet man einen kleinen Würfel in der Mitte des großen Würfels.
Beim Tetraederrahmen beobachtet man 6 gleiche gleichschenklige Dreiecke aus dem Zentrum des Tetraeders mit Winkeln von 120 Grad.

### Quellen

- `http://www.physik.uni-mainz.de/lehramt/lehramt/Vortraege/Anleitung/ASchm_StEx.pdf`

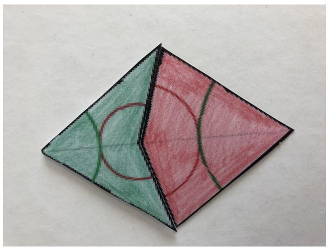
# 12 Das Penrose-Parkett

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Geometrische Muster, Parkette |
| **Beschreibung** | Man soll mithilfe von Drachen- und Pfeilenteilchen ein Puzzle flächendeckend und lückenlos puzzlen. Das Puzzle ist ein typischer Ausschnitt aus einem Penrose-Parkett |

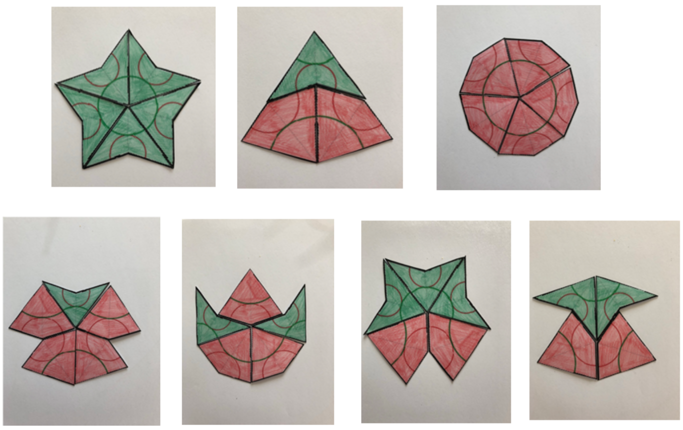
Ein großer Teil der Lösung ist im Exponat „Wer findet den Fisch?“ zu finden (dort sind allerdings Drachen und Pfeile nicht farblich getrennt):

Die vollständige Lösung des Penrose-Parketts wird durch folgendes Foto gegeben:

Das Penrose-Parkett ist ein aperiodisches Parkett, wobei es zwei verschiedene Kacheln gibt: den Drachen (rot) und den Pfeil (grün). Diese sind eng mit einem regulären Fünfeck verwandt, in welchem ein Drache zusammen mit einem Pfeil eine Raute bildet. Die Winkel des Drachens sind 144° und 72°, und die Winkel der Pfeile sind 216°, 72° und 36° (also findet man für die Raute die Winkel 72° und 108°, und 72° ist auch der Winkel eines regulären Fünfecks). Da man mit Rauten ein periodisches Muster legen kann, hat Penrose Legeregeln veröffentlicht. Diese werden in diesem Exponat durch puzzleartige Einkerbungen und Ausbuchtungen respektiert.



Mit „Drachen“ und „Pfeilen“ kann man folgende 7 Scheitelpunktfiguren erstellen:



**Historischer Hintergrund**

Mathematiker nennen eine lückenlose Aneinanderreihung von einzelnen Steinen oder Fliesen, die insgesamt die ganze Ebene überdeckt, ein Parkett. Badezimmerfliesen bilden ein Parkett, genauso wie ein kariertes Blatt Papier. Genauer gesagt sind dies Ausschnitte aus einem unendlich großen Parkett. Aber sobald man den Ausschnitt kennt, weiß man wie es weitergeht, da sich ein bestimmtes Muster ergibt, das sich immer weiter wiederholt. In diesen

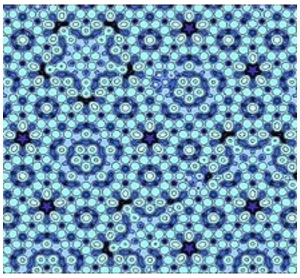
Fällen funktioniert die Konstruktionsmethode durch Verschieben. Man nennt diese Parkette periodisch. Das Penrose-Parkett ist jedoch aperiodisch.
Lange Zeit dachten die Mathematiker, dass sie nur mit periodischen Mustern eine Ebene überdecken können. Das erste aperiodische Parkett hatte über 20000 verschiedenen Kacheln, Roger Penrose konnte schließlich 1974 die Zahl der Kacheln auf zwei reduzieren.

**Anmerkungen**

Im Penrose Parkett kann man immer wieder „Räder“ und „Sterne“ finden, die aus jeweils 5 Teilen bestehen. Diese lokalen 5-er Symmetrien charakerisieren das Penrose-Parkett. Penrose-Parkette sind ästhetisch besonders attraktiv, und zwar aufgrund ihrer Spannung zwischen den lokalen hochsymmetrischen Figuren (wie etwa der Blume) und der globalen Aperiodizität.

Für die Ästhetik spielt auch der goldene Schnitt ($\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1,6$) eine Rolle: Das Verhältnis von Drachen zu Pfeilen entspricht im Penrose-Parkett exakt $\Phi$.

Ein Penrose-Parkett kann man in einem Quasikristall finden, wenn man ihn entlang einer bestimmten Linie aufschneidet.



**Quellen**


- `http://docplayer.org/24667704-Mathematik-er-leben-und-be-greifen-exponate-der-mathematikausstellung-in-muenchen.html`
- `https://www.mis.mpg.de/de/mathe-ausstellung/das-penrose-puzzle.html`

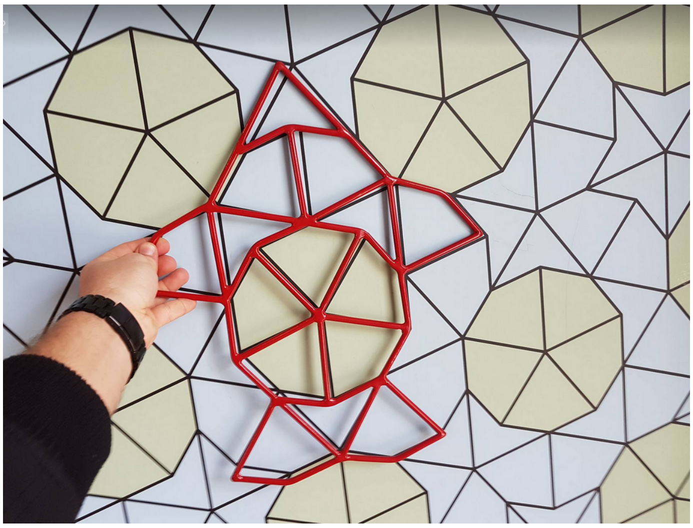
# 13 Wer findet den Fisch?

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Geometrische Muster, Penrose-Parkett |
| **Beschreibung** | Man soll den Umriss eines Fisch anhand einer Schablone in einem Penrose-Parkett finden. |

### Anmerkungen

Man hat ein Penrose Parkett (siehe bitte das vorherige Kapitel). Der Fisch passt zwar nur an einer Stelle, dort aber in 5 verschiedenen Richtungen wegen der lokalen Rotationssymmetrie.

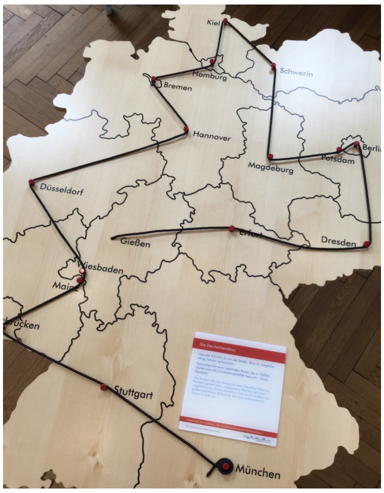
Das Exponat fordert das strukturierte Ausprobieren. So bekommen die Schüler ein besseres Verständnis für die Aperiodizität im Penrose-Parkett.



# 14 Die Deutschlandtour

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Algorithmen, Optimierung |
| **Beschreibung** | Gewisse Städte auf einer Karte müssen mit einem einzigen Seil so verbunden werden, dass insgesamt die kürzeste Distanz zurückgelegt wird. |

Für manche isolierten oder benachbarten Städten ist es klar, welche die Reihenfolge sein muss.



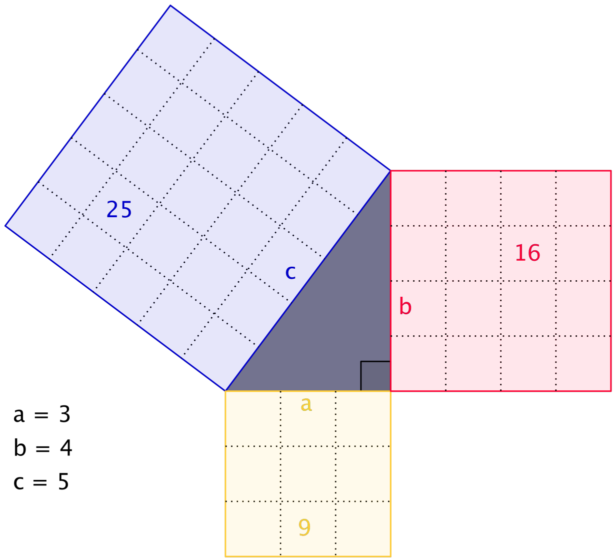

Im „Travelling Salesman Problem“ (kurz TSP) wird der kürzeste Weg gesucht, um durch eine gewisse Anzahl von Städten zu reisen und um dann wieder zur Anfangsstadt zurück zu gelangen. Es handelt sich darum, die beste Anordnung zwischen den Städten auszuwählen.
Es gibt verschiedene Algorithmen, um dieses Problem zu lösen. Der banalste ist das exakte Lösungsverfahren (brute force). Dort versucht man alle möglichen Anordnungen. Es gibt verschiedene Algorithmen die angewandt werden können: ein ganz schneller allgemeiner Algorithm ist aber nicht bekannt.

Hier gibt es 17 Städte, die Anfagsstadt ist vorgegeben und man darf nicht zur Anfagsstadt zurückkehren: es gibt also prinzipiell $17! \sim 10^{14}$ Möglichkeiten.

# 15 Pythagoras zum Legen

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Satz des Pythagoras |
| **Beschreibung** | Durch das Auslegen der Quadrate durch kleine quadratische Formen wird der Satz des Pythagoras in einem Spezialfall gezeigt. |

Es gibt 25 quadratischen Plättchen mit jeweils einer blauen Seite. 16 dieser Plättchen haben zusätzlich eine rote Seite und 9 haben zusätzlich eine gelbe Seite. Die quadratischen Plättchen füllen entweder die zwei Kathetenquadrate (gelb bzw. rot) oder das Hypotenusenquadrat (blau) vollständig aus.



# 16 Das Spiegelbuch

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Spiegelungen |
| **Beschreibung** | Es gibt zwei Spiegel mit einer gemeinsamen Seite, der Winkel dazwischen kann geändert werden. Man kann die Anzahl der Spiegelbilder bei den verschiedenen Winkel beobachten und symmetrische Formen erzeugen. |

Besonders interessant sind die Öffnungswinkel, welche sich als ganzzahlige Teiler von 360° ergeben, also Winkel der Größe $\frac{360°}{n}$ (mit $n = 2, 3, 4, 5, ...$). Hier entstehen $n - 1$ Spiegelbilder (man sieht also genau $n$ Objekte, wenn man das reelle Objekt mitzählt). Legt man einen Stab symmetrisch zwischen die zwei Spiegel, dann sieht man ein $n$-Eck, das durch die Spiegelbilder des Stabes ensteht.

| Öffnungswinkel | Anzahl der Spiegelbilder | Vieleck |
|---|---|---|
| 120° | 2 | Dreieck |
| 90° | 3 | Viereck |
| 60° | 5 | Sechseck |
| 45° | 7 | Achteck |
| 40° | 8 | Neuneck |
| 36° | 9 | Zehneck |

Hat das Vieleck eine gerade Anzahl von Seiten, kann man diese halbieren indem man den Stab senkrecht zu einer Seite legt, zum Beispiel:

### Mathematik

Das Prinzip des Spiegelbuches: Ein Spiegelbuch besteht nicht nur aus einem, sondern aus zwei Spiegeln. Bei einem einfachen Spiegel hat jedes Objekt genau ein Spiegelbild. Beim Spiegelbuch spiegeln sich aber die Seiten zudem noch gegenseitig. Das Gesamtbild entsteht durch die mehrfache Reflexion in beiden Spiegeln. Eine erste Beobachtung zeigt: je kleiner der Winkel, desto mehr Spiegelbilder entstehen. Man könnte denken, dass so unendlich viele Spiegelbilder entstehen. Aber manchmal ist es so, dass ein Spiegelbild des rechten (resp. linken) Spiegels und das entsprechende des linken (resp. rechten) Spiegels gleich sind. Dann werden also durch weitere Spiegelungen einfach nur die vorigen Bilder reproduziert und man erhält ein Muster aus lediglich endlich vielen Bildern. Wie diese Bilder prinzipiell entstehen, ist klar: Das Objekt spiegelt sich im rechten und im linken Spiegel. Aber auch das Spiegelbild des rechten Spiegels wird im linken gespiegelt. Und dieses Spiegelbild spiegelt sich wieder im rechten Spiegel. Und so weiter. Es entstehen sowohl Achsen- als auch Drehsymmetrien.

### Quellen


- `http://www.lehrer.uni-karlsruhe.de/~za665/OSA/spiegelb/main.html`
- `http://www.imaginata.de/files/spiegelbuch.pdf`

# 17 Die Smarties

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Statistik, Abschätzen |
| **Beschreibung** | Vorhanden ist ein Poster mit einigen Tausend Smarties und ein kleiner quadratischer Rahmen. Durch das Zählen der Smarties im Rahmen kann man die Gesamtzahl der Smarties auf dem Poster abschätzen. Dafür muss man auch zählen wie oft der Rahmen ins Poster passt. |

Die Aufgabe, etwas abzuschätzen, ist nicht immer eine leichte Sache. Bei dieser Methode ist es essentiell, dass die Objekte, deren Anzahl es zu bestimmen gilt, relativ gleichmäßig verteilt sind. Übrigens findet man mit dieser Methode immer nur einen Näherungswert der tatsächlichen Anzahl der Smarties.

Die Anzahl der Smarties die man im Rahmen zählt, kann etwas schwanken. Der erste Grund dafür ist, dass die Schüler den Rahmen an verschiedene Stellen des Posters halten. Um eine Verbesserung des Resultats zu erlangen könnte man den Mittelwert mehrerer Abzählungen benutzen.
Ein zweiter Grund ist, dass man die Smarties, die nur teilweise im Rahmen enthalten sind, auf verschiedene Arten abzählen kann:

Etwa ein halber Smartie kann man als $0,5$ dazuzählen. Ein Smartie, das sich 'fast ganz' im Rahmen befindet, kann man als 1 Ganzes (oder als 0,5) dazuzählen. Ein Smartie, das sich 'fast nicht mehr' im Rahmen befindet, kann man nicht (oder als 0,5) dazuzählen. Man geht hier davon aus, dass sich Aufrundungen und Abrundungen insgesamt (wegen der gewissen Zufälligkeit) fast kompensieren.

# 18 Wer kommt am weitesten raus?

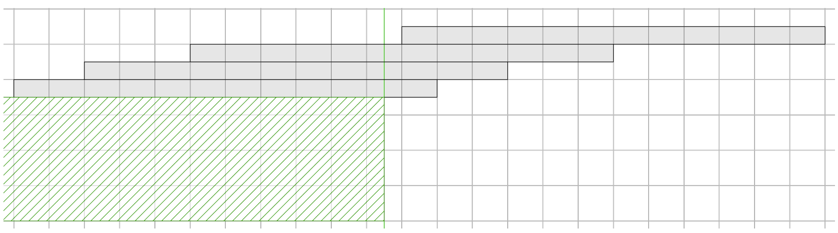
| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Zahlenfolgen |
| **Beschreibung** | Bei diesem Experiment kommt es darauf an, Steine so auf ein Podest aufzutürmen, dass ein Stein frei über dem Abgrund schwebt. |

Die einfachste Lösung ist: Man stapelt alle Steine zu einem Turm. Man schiebt den obersten Stein so weit nach außen, wie es geht. Man schiebt den zweit-obersten Stein (mit dem obersten Stein drauf) so weit nach außen wie es geht. Dies wiederholt man dann bis zum letzten Stein.
Es gibt andere Möglichkeiten, um die Aufgabe erfolgreich zu lösen (z. Bsp.: einige Steine um 45 Grad drehen).

### Mathematik

Wenn man den obersten Stein so weit nach außen schiebt wie nur möglich, kommt man genau bis zur Hälfte des Steines raus. Den zweitobersten Stein kann man dann bis zu $\frac{1}{4}$ seiner Länge hinausschieben. Der oberste Stein schwebt nun zu $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ über der Kante. Der drittoberste Stein lässt sich dann noch zu $\frac{1}{6}$ seiner Länge hinausschieben und der vierte zu $\frac{1}{8}$ und so weiter. Mit 4 Steinen ist es schon möglich, den obersten Stein ganz über dem Abgrund schweben zu lassen.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{25}{24} > 1$$



Man bekommt die Hälfte der harmonischen Reihe:

$$2\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + ...\Big) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...$$

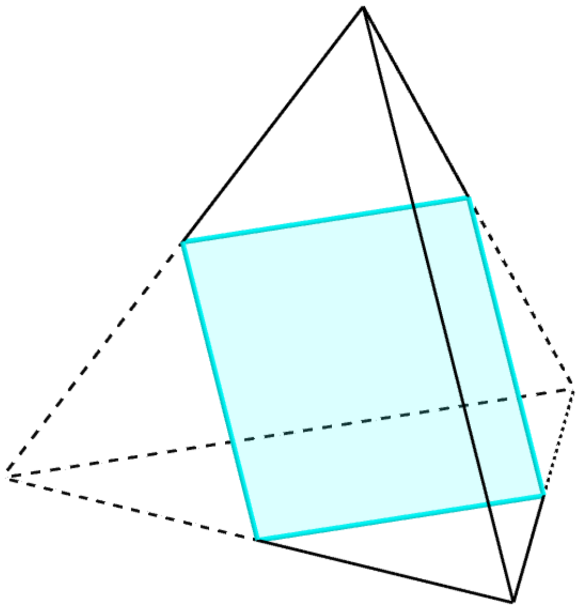
Die harmonische Reihe wird größer als jede Zahl (um das zu beweisen, einfach jede Zahl im Nenner auf die nächste Zweierpotenz aufrunden).

# 19 Die 2-er Pyramide

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Räumliches Denken |
| **Beschreibung** | Das Knobelspiel besteht aus zwei gleichen Körpern. Die Seitenflächen dieser Teile sind jeweils zwei Dreiecke, zwei Trapeze und ein Quadrat. Die zwei Teile sollen zu einem Tetraeder zusammengesetzt werden. |

Das Puzzle entsteht als Schnitt eines Tetraeders durch eine Ebene (man schneidet 4 Kanten in der Mitte). Der Schnitt ist ein Quadrat.

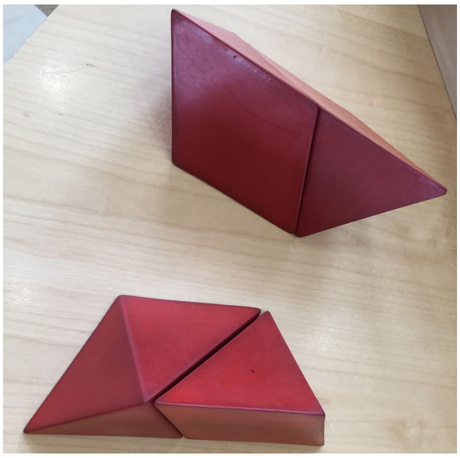
Man erkennt, dass die Quadratfläche der zwei Teile stört, da in einem Tetraeder nur Dreiecke vorkommen. Somit muss man diese Quadrate verschwinden lassen, und dies ist nur möglich indem man die beiden Quadrate aufeinanderlegt. Durch Drehen der beiden Teile ergibt sich schlussendlich eine Pyramide.



# 20 Die 4-er Pyramide

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Räumliches Denken |
| **Beschreibung** | Das Knobelspiel besteht aus vier gleichen Teilen. Die vier Teile sollen zu einem Tetraeder zusammengesetzt werden. |

Man kann versuchen, die Teile paarweise zusammenzusetzen, sodass man die zwei Teile des vorherigen Exponates „2-er Pyramide“ erhält. Danach kann man die zwei erhaltenen Teile genauso zusammensetzen wie bei der 2-er Pyramide.



# 21 Das T-Puzzle

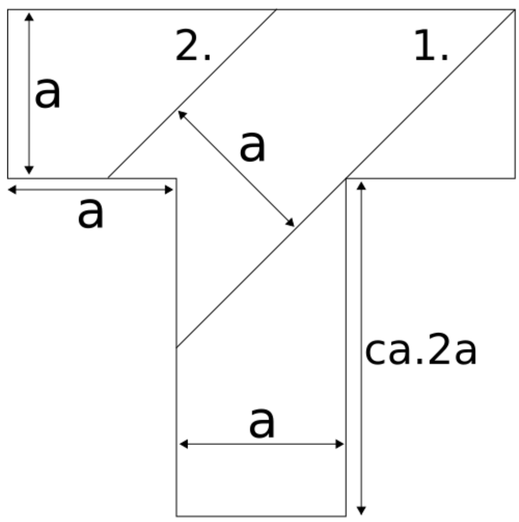
| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Ebene Geometrie |
| **Beschreibung** | Das Knobelspiel besteht aus vier Puzzleteilen. Aus den vier Teilen soll der Buchstabe T gelegt werden. |

### Strategie

Das Puzzleteil mit dem äußeren rechten Wickel ist auffällig. (Es ist nicht konvex.) Dieses Puzzleteil soll so gelegt werden, dass es jedes andere Teil berührt. Man kann beispielsweise dieses Teil in die Mitte legen und versuchen das T rundherum mit den anderen Teilen zu vervollständigen.

### Anmerkungen

Dieses Spiel sieht einfach aus, ist es aber nicht. Die zwei Schnitte des T's sind parallel zueinander, und jedes der vier enstandenen Teile hat die gleiche Breite. Die erste Intuition besteht fast immer darin, die Ecke in dem nicht konvexen Teil zu füllen, was aber nicht zu einem Ergebnis führt.



# 22 Bunte Steine

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Ähnlich wie Sudoku |
| **Beschreibung** | Das Knobelspiel besteht aus einem $4 \times 4$ Raster und 16 Steinen. Die Steine bestehen aus 4 Formen und jeweils 4 Farben.<br>Ziel ist es, die Steine so in das Raster zu verteilen, dass jede Farbe und jede Form in jeder Zeile und jeder Spalte nur ein einziges Mal vorkommt. |

### Lösungen

Es gibt zwei Merkmale mit jeweils 4 Möglichkeiten: nennen wir diese A,B,C,D und $1, 2, 3, 4$.
Es gibt 16 Objekte, sodass die zwei Merkmale sich nie beide wiederholen: nennen wir diese A1 bis D4.
Man kann zuerst die erste Zeile willkürlich wählen (aber natürlich den Regeln entsprechend). O.B.d.A. ist die erste Zeile A1,B2,C3,D4.
Eine mögliche Lösung ist dann

| | | | |
|---|---|---|---|
| A1 | B2 | C3 | D4 |
| C4 | D3 | A2 | B1 |
| B3 | A4 | D1 | C2 |
| D2 | C1 | B4 | A3 |

Die Lösung ist nicht eindeutig: man kann zum Beispiel die erste Zeile verändern oder das Raster einfach um 90° drehen. . . es gibt in der Tat einige Tausend Lösungen.

### Historischer Hintergrund

Dieses Problem geht auf den Mathematiker Leonard Euler zurück der auf dem Hof in St. Petersburg arbeitete und im Jahr 1779 das „Problem der 36 Offiziere“ formulierte.
Jeder Offizier wird durch ein Regiment und den Dienstgrad charakterisiert. Es gibt sechs Regimente und sechs Dienstgrade. Kombiniert man diese miteinander erhält man $6 \cdot 6 = 36$ Möglichkeiten. Man kann zum Beispiel sechs Offiziere vom ersten Regiment auswählen sodass jeder Dienstgrad einmal vorkommt, sechs vom zweiten Regiment sodass jeder Dienstgrad einmal vorkommt und so weiter. Die eigentliche zu lösende Frage war, ob man diese 36

Offiziere in einem quadratischen Raster ($6 \times 6$) so aufstellen kann, sodass in jeder Spalte und jeder Zeile jedes Regiment und jeder Dienstgrad nur einmal vorkommt.
Im Allgemeinen kann man ein $n \times n$ Raster benutzen (d.h. $n$ Merkmale mit jeweils $n$ Möglichkeiten). Es wurde bewiesen (Mitte des 20. Jahrhunderts), dass es für alle $n$ ausser 2 und 6 eine Lösung gibt (und dass es für 2 und 6 keine Lösung gibt, da man alle Möglichkeiten ausschliessen kann). Z.B. wenn man die erste Zeile im $2 \times 2$ Raster gewählt hat muss man unbedingt die zweite Zeile wie folgt füllen

| | |
|---|---|
| A1 | B2 |
| B2 | A1 |

und diese ist keine gültige Lösung da man genau die Teile A1,A2,B1,B2 benutzen muss.

Ein *lateinisches Quadrat* der Ordnung n ist eine $n \times n$ Matrix, bei der in jeder Zeile und jeder Spalte alle Zahlen von 1 bis $n$ vorkommen. Da man in diesem Exponat zwei Merkmale hat, sucht man zwei lateinische Quadrate die orthogonal sind, d.h. sodass beim Übereinanderlegen alle möglichen $n \times n$ Zahlenpaare vorkommen.

**Quellen**

`https://www.uni-oldenburg.de/fileadmin/user_upload/mathe/tdm/2017/Vortrag_Defant.pdf`

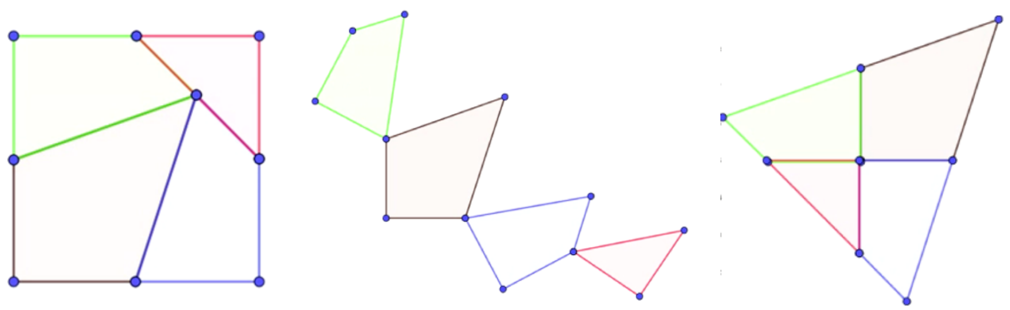
# 23 Das Quaderdreieck

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Ebene Geometrie |
| **Beschreibung** | Das Knobelspiel besteht aus vier Puzzleteilen. Aus diesen vier Teilen soll man in einer ersten Phase ein Quadrat und in einer zweiten Phase ein gleichseitiges Dreieck bilden. |

**Strategie**

Ein Quadrat hat vier gleich lange Seiten: man kann analysieren, welche Teile zusammen die gleiche Länge ergeben.
Die Winkel in einem gleichseitigen Dreieck haben eine Größe von 60 Grad: man kann analysieren, wo sich diese Winkel in den Puzzelteilen befinden.

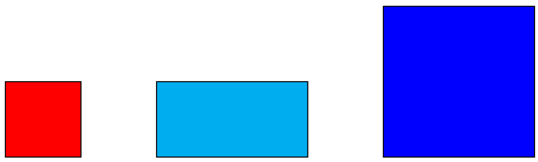
Verbindet man die Teile durch Scharniere, so kann man durch einfaches Drehen aus dem Quadrat ein Dreieck bilden.



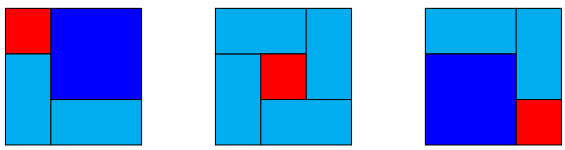
# 24 Conway-Cube

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Raumvorstellungen |
| **Beschreibung** | Es gibt drei rote Würfel (der Größe $1 \times 1 \times 1$) und sechs blaue Quader (der Größe $2 \times 2 \times 1$). Aus diesen Teilen soll man einen Würfel (der Größe $3 \times 3 \times 3$) zusammensetzen. |

Die Seitenflächen des kleinen Würfels bzw. des Quaders sind:

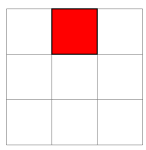


**Die kleinen Würfel befinden sich auf der Raumdiagonale des zu bauenden Würfels. Die Position der Quader ergibt sich dann. Dies stellt die einzige Lösung des Problems (bis auf Symmetrien) dar:**

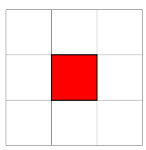


## Beweis

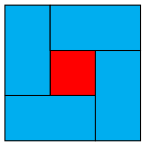
1. Wichtige Anmerkung: In jeder Schicht muss mindestens ein Quadrat sein (aus Paritätsgründen), und daher gibt es höchstens ein Quadrat in jeder der drei Schichten.
2. Eine Seitenfläche des Würfels kann nicht so aussehen, wie in nebenstehender Abbildung gezeigt, da es unmöglich ist, die restliche Fläche weiter zu bedecken.



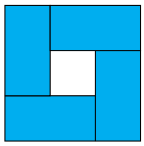
3. Eine Seitenfläche des Würfels kann nicht wie folgt aussehen,



da die einzige Möglichkeit (unter Berücksichtigung der Symmetrie) die restliche Fläche zu bedecken, folgende wäre:

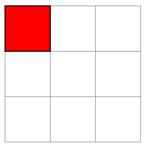


Dann würde die nächste Ebene wie folgt aussehen

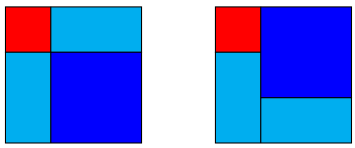


Um diese zu vervollständigen, muss man den roten Würfel wieder in der Mitte platzieren. Somit müsste man die letzte Schicht mit einem roten Würfel und zwei blauen Quadern bauen, was nicht möglich ist.

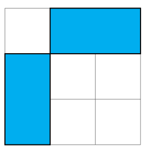
4. Somit kann man festhalten, dass sich ein rotes Quadrat auf einer Seitenfläche des zu bauenden Würfels nur in einer der vier Ecken befinden kann. Alle Fälle sind durch Symmetrie zurückzuführen auf:



Um die restliche Fläche zu bedecken, gibt es zwei Möglichkeiten:

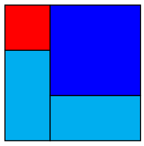


5. Die erste Konfiguration ist nicht möglich, da die nächste Ebene wie folgt aussehen würde:

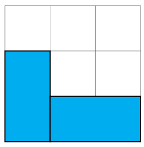


Somit muss man einen roten Würfel in eine Ecke der mittleren Ebene des zu bauenden Würfels setzen. Dies wiederspricht Punkt 4 für die nebenstehenden Seitenflächen.

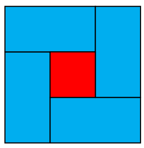
6. Daraus kann man schlussfolgern, dass eine Seitenfläche des Würfels (unter Berücksichtigung der Symmetrie) folgendermaßen aussieht:



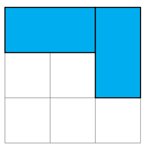
Die mittlere Ebene ergibt dann:



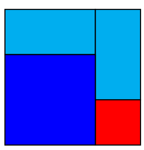
Laut Punkt 4. muss diese folgendermaßen aussehen:



7. Somit enthält die letze Ebene:



Ein blauer Quader und ein roter Würfel sind übrig. Daraus ergibt sich dann folgende Konfiguration für die letzte Schicht:



## 25 1 aus 10000

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Wahrscheinlichkeitsrechnung |
| **Beschreibung** | Eine Flasche enthält 9999 kleine blaue Glaskügelchen und 1 kleines schwarzes Glaskügelchen. Ziel ist es, das schwarze Glaskügelchen durch Bewegen der Flasche zu finden. Nach wenigen Fehlversuchen kann schnelles Desinteresse eintreten. |

### Anmerkungen

Ziel ist es die schwarze Kugel zu finden, respektiv darüber nachzudenken, wie man das am Besten schafft (die Flasche stark schütteln, um die eigene Achse drehen, langsam hin und her bewegen,...). Beim Exponat in der Wanderausstellung ist dies auch (mit etwas Geduld) mit einer recht großen Wahrscheinlichkeit zu erreichen.

# 26 Die Würfelschlange

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Wahrscheinlichkeitsrechnung |
| **Beschreibung** | • Das Exponat besteht aus 40 Würfeln. Würfele mit allen Würfeln gleichzeitig und lege sie in eine Linie oder eine Schlange: es ist nur wichtig, dass ein Würfel nach dem anderen kommt.<br>• Schau dir den ersten Würfel an. Dieser zeigt zum Beispiel eine Zwei. Dann gehst du zwei Würfel weiter und landest in diesem Fall beim dritten Würfel. Nun schaust du, welche Augenzahl der dritte Würfel zeigt und gehst um genau diese Anzahl von Würfeln weiter. Dieses Verfahren wiederholst du so oft, bis du zu einem Würfel kommst, dem nicht mehr genug Würfel folgen, die du abzählen kannst. Zum Beispiel, wenn du zum drittletzten Würfel gelangst und dieser zeigt eine Drei. Du nimmst nun die überschüssigen Würfel weg, in diesem Beispiel die letzten zwei.<br>• Nehme den ersten Würfel der Schlange und würfele ihn noch einmal. Lege ihn nun wieder vorne an die Schlange und wiederhole das vorher erklärte Verfahren. Du wirst sehr wahrscheinlich feststellen, dass du genau auf dem letzten Würfel der Schlange ankommst. Ist das nur Zufall?<br><br>Es besteht auch stets die Möglichkeit, dass der Trick nicht funktioniert. |

Wir landen früher oder später wieder auf einem Würfel aus dem ersten Durchgang, und ab diesem Würfel wiederholt sich der erste Durchgang wieder.

Insbesondere landen wir auf dem letzten Würfel (da wir die überschüssigen Würfel weggeworfen hatten).
Je mehr Würfel, desto höher die Wahrscheinlichkeit auf einem Würfel aus dem ersten Durchgang zu landen. Dann funktioniert der Trick auch mit großer Wahrscheinlichkeit.

### Mathematik

Lass uns jeden Würfel, auf dem wir im ersten Durchgang landen, markieren (einfach etwas aus der Reihe schieben). Da die höchste Zahl, die ein Würfel zeigen kann, eine Sechs ist, muss in den sechs Würfeln, die einem markierten Würfel folgen, mindestens ein markierter Würfel sein. Bei jedem Schritt beträgt also die Wahrscheinlichkeit, auf einem markierten Würfel zu landen, mindestens $\frac{1}{6}$. Bei 40 Würfeln, haben wir mindestens 6 markierte Würfel. Die Wahrscheinlichkeit, dass wir wieder auf dem letzten Würfel landen, lässt sich dann wie folgt nach unten abschätzen:

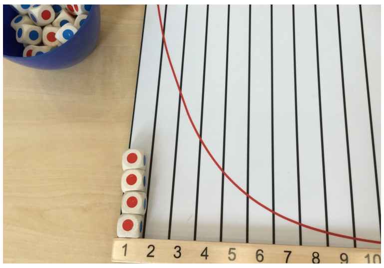
$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 1 - \frac{15625}{46656} = \frac{31031}{46656} \approx 67\%$$

### Quellen

`http://www.gymnasiumkoenigsbrunn.de/mathe-zum-anfassen/articles/wuerfelschlange.html`

## 27 Rote Würfel raus!

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Wahrscheinlichkeitstheorie, Exponentialfunktion |
| **Beschreibung** | Ein Spielbrett ist in mehrere vertikale Spalten unterteilt und eine rote Kurve ist aufgezeichnet. 40 Würfel haben alle zwei rot und vier blau eingefärbte Seiten.<br>• Es wird mit allen Würfel zeitgleich gewürfelt. Alle Würfel, die eine rote Oberseite haben, werden aussortiert und in die erste Spalte des Spielbrettes gelegt. Die blauen Würfel werden wieder in den Würfelbecher gelegt.<br>• Mit den restlichen Würfeln wird zeitgleich gewürfelt und alle Würfel mit einer roten Oberseite werden erneut aussortiert und in die zweite Spalte gelegt.<br>• Dieses Spielmuster wird weitergeführt, bis keine blauen Würfel mehr vorhanden sind. Wenn in einem Wurf kein Würfel eine rote Oberseite zeigt, wird erneut gewürfelt, jedoch wird die dem Wurf entsprechende Spalte im Spielbrett übersprungen. Sie bleibt leer. |




Das Ergebnis nach einem Spieldurchgang weicht oft deutlich von der vorgegebenen roten Kurve ab. Wird das Exponat jedoch mehrere Male durchgespielt und der Durchschnitt berechnet, so nähert sich der Durchschnittswert immer mehr der vorgezeichneten Kurve.

**Mathematik**

Da jeder Würfel zwei rote und vier blaue Seiten hat und es sich um ehrliche Würfel handelt, liegen die Wahrscheinlichkeiten, dass die Oberseite rot beziehungsweise blau ist bei $\frac{1}{3}$ beziehungsweise $\frac{2}{3}$.

Beim ersten Wurf ist also zu erwarten, dass $\frac{1}{3}$ der Würfel rot und $\frac{2}{3}$ der Würfel blau sein werden. Da mit 40 Würfeln gespielt wird, werden beim ersten Wurf $\frac{1}{3} \cdot 40 \approx 13$ rote und $\frac{2}{3} \cdot 40 \approx 27$ blaue Würfel erwartet.
Beim zweiten Wurf werden die blauen Würfel des ersten Wurfs (im Schnitt $\frac{80}{3} \approx 27$) erneut gewürfelt, wobei man erwartet, dass $\frac{1}{3}$ der Würfel rot und $\frac{2}{3}$ der Würfel blau sein werden, was also im Schnitt $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 40\right) \approx 9$ roten und $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 40\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 40 \approx 18$ blauen Würfeln entspricht.

Man kann die einzelnen Würfe und die jeweilig im Schnitt erwartete Anzahl an roten und blauen Würfeln in folgender Tabelle zusammenfassen:

| | rote Würfel | blaue Würfel |
|---|---|---|
| 1. Wurf | $\frac{1}{3} \cdot 40$ | $\frac{2}{3} \cdot 40$ |
| 2. Wurf | $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 40\right)$ | $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 40\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 40$ |
| 3. Wurf | $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 40$ | $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 40 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 40$ |
| n. Wurf | $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot 40$ | $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot 40 = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot 40$ |

Beim $n$. Wurf ist also zu erwarten, dass $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot 40$ rote Würfel auf das Spielbrett gelegt werden. Die rote Linie auf dem Spielbrett entspricht einer Exponentialfunktion:

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \cdot 40\,.$$

**Quellen**


- `https://mug.didaktik-graz.at/Files/Mathematikum/Gruene-Wuerfel-raus.pdf`
- `http://www.mathematikum.de/uploads/media/Zusatzmaterial_Lehrer_01.pdf`

# 28 Der Zweite ist immer der Erste

| **Themenbereich** | Wahrscheinlichkeitsrechnung |
|---|---|
| **Beschreibung** | Das Exponat besteht aus 4 Würfeln („Efronische Würfel“), die wir blau (B), gelb (Y), grün (G), und rot (R) nennen. Die Würfel sind folgendermaßen beschriftet (es ist unwichtig, auf welcher Seite sich die angegebenen Zahlen befinden):<br>$B\,(111555)$<br>$Y\,(004444)$<br>$G\,(333333)$<br>$R\,(222266)$<br>Der erste Spieler wählt einen Würfel und würfelt. Der zweite Spieler wählt einen der drei übrigen Würfel und würfelt ebenfalls. Der Spieler mit der höheren gewürfelten Zahl gewinnt.<br>Ziel ist es, herauszufinden, warum der zweite Spieler immer einen Würfel wählen kann, mit dem er meistens gewinnt. |

### Hinweise

Die Schüler sollen beobachten, dass es keinen besten Würfel gibt, jedoch für jeden Würfel einen Besseren.

Obwohl es sich nicht um Standardwürfel handelt, sind die Würfel ehrlich, was bedeutet, dass alle Werte auf den Seitenflächen mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten.

### Zielgruppe

Die Schüler ab der $5^e$ können (z.B. mit Hilfe von Baumdiagrammen) die Gewinnchancen berechnen. In den oberen Klassenstufen bietet es sich an, das Exponat nicht durchzuspielen, sondern sich einfach die mathematische Modellierung ausarbeiten.

### Historischer Hintergrund

Ein bekanntes ähnliches Spiel ist *Schere, Stein, Papier*: die Schere gewinnt gegen das Papier, das Papier gegen den Stein, und der Stein gegen die Schere.

Die Efronische Würfel wurden 1938 von Efron (Professor der Statistik an der Stanford University) erfunden.

### Mathematik

Hier eine Tabelle, die die Gewinnchancen des zweiten über dem ersten Würfel resümiert (diese Wahrscheinlichkeiten lassen sich einfach z.B. mit Baudiagrammen berechnen):

| 2. Würfel / 1. Würfel | B | Y | G | R |
|---|---|---|---|---|
| B | | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ |
| Y | $\frac{2}{3}$ | | $\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{9}$ |
| G | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | | $\frac{1}{3}$ |
| R | $\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{2}{3}$ | |

Man kann also immer den zweiten Würfel so wählen, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ ist. Die Tabelle veranschaulicht außerdem, dass, wenn alle Würfel gegeneinander antreten, der rote Würfel die besten Gewinnchancen hat.

### Quellen


- https://lehrerfortbildung-bw.de/u_matnatech/mathematik/bs/6bg/6bg2/download/documents/807_d_efronsche_wuerfel_ab_ta.pdf
- http://www.hib-wien.at/leute/wurban/mathematik/NontransitiveDice.pdf

# 29 Die Spiegelbuchstaben

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Achsensymmetrie |
| **Beschreibung** | Das Exponat besteht aus einem waagerecht verlaufenden Spiegel, einer angrenzenden Holzplatte und einer Vielzahl von Schaumstoffbuchstabenhälften. Die Aufgabe besteht darin, die Buchstabenhälften so an den Spiegel zu legen, dass sie durch ihre Spiegelbilder zu ganzen Buchstaben ergänzt, und so aus ihnen „Spiegelwörter“ gebildet werden. |

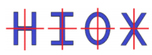
### Lösungen

Zunächst versucht man beim Experimentieren an der Spiegelachse herauszufinden, welche Buchstaben eine waagerechte Spiegelachse haben, nämlich die Buchstaben


Es können beispielsweise folgende einfache Wörter gebildet werden: ICH, EI, DOCH, KOCH, BOCK, DEO, DEICH, CODE, ODE, DIEB, EBBE, OXID, BIO. Außerdem kann man einige Vornamen aufstellen wie z.B. DEBBIE, HEIDI, HEIKE, HEIKO, BODO. Auch Wortgebilde mit Artikel, Adjektiven oder Verben sind möglich: DIE HECKE, DIE ECKE, DIE HEXE, DIE HEIDE, DIE HOHE DECKE, DIE IDEE, DIE HOHE EICHE, ICH HOCKE, ICH KOCHE. Es lässt sich z.B. auch folgender Satz finden: ICH HEBE DIE BOX HOCH. Palindrome sind Zeichenketten, welche sowohl vorwärts als auch rückwärts gelesen identisch sind. Beispiele für Palindrome, die zudem achsensymmetrisch sind: OTTO, BOB, EBBE, TAT, TUT, TOT, UHU, WOW.

### Anmerkungen

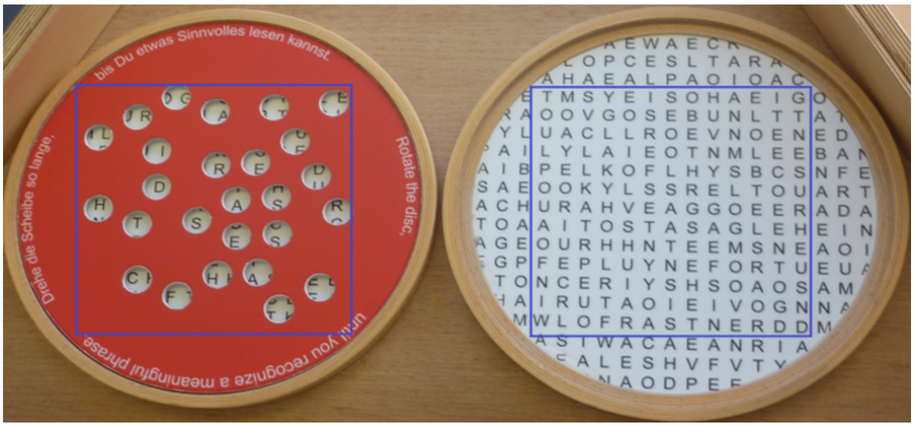
Buchstaben mit senkrechter Symmetrieachse: 


Buchstaben mit zwei Symmetrieachsen: 


Kein Buchstabe hat mehr als zwei Symmetrieachsen (es sei denn, man bezeichnet das O mit einem Kreis).

# 30 Der Geheimcode

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Kryptographie |
| **Beschreibung** | Das Experiment basiert auf einer kreisrunden Scheibe mit 26 Löchern, welche als Schablone auf eine kreisförmige mit Buchstaben beschriftete Matrix gelegt wird. Zum Knacken der Geheimcodes soll man die Scheibe vorsichtig Schritt für Schritt drehen. Dabei sollte man stets genau hinsehen, um die richtige Drehposition zu entdecken, bei der die Buchstabenfolge in den Löchern einen verständlichen Text ergibt. Der Text wird Zeile für Zeile gelesen. Sinnvolle Texte erscheinen lediglich in vier Positionen. |




### Mathematik

Die Codierung erfolgt mithilfe einer *Fleißner-Schablone*: Bei der Verschlüsselung werden unwichtige Buchstaben innerhalb des Textes hinzugefügt und die Schablone deckt alle hinzugefügten Buchstaben ab.
Typischerweise unterteilt man eine quadratische Schablone in kleinere Quadrate und schneidet einige davon nach einem bestimmten Muster aus. Diese Schablone wird dann auf eine gleichgroße quadratische Matrix gelegt. Zeilenweise schreibt man nun jeweils ein Buchstabe durch das entsprechende Loch auf das darunterliegende Papier. Um eine möglichst lange Nachricht zu kodieren, sollte man Folgendes beachten: Bei einer Drehung der Schablone um

90 Grad, um 180 Grad sowie um 270 Grad kommen die Löcher der Schablone auf noch unbeschriebene Felder auf; die Anzahl der Löcher sollte ein Viertel aller Felder sein. In der Regel wird hierfür ein $6 \times 6$ Quadrat benutzt, und eine optimale Schablone mit 9 Löchern (dies ermöglicht die Verschlüsselung eines Textes mit 36 Zeichen). Andere Quadratgrößen sind auch erlaubt. Quadrate mit ungerader Feldanzahl als Seitenlänge sind aber ungewöhnlich, da das Feld in der Mitte der Schablone seine Position beim Drehen nicht ändert. Inmitten des Exponats ist ein „Fleißner Quadrat“ der Größe $13 \times 13$ platziert. Vier Sätze der Länge $13 \times 2$ sind da versteckt, nämlich: *Geheimcodes machen viel Spass, Gratuliere du hasts geschafft, Du brauchst den richtigen Dreh, Meistens ergibt sich nur Chaos.*

### Historischer Hintergrund

Der Mathematiker Gerolamo Cardano (16. Jahrhundert) hatte ursprünglich die Idee, eine Botschaft unter einfachem Text durch eine Schablone zu verstecken (durch die Schablone sind nur noch die Wörter der Botschaft zu sehen). Dieses Verfahren wurde bis ins 17. Jhd. eingesetzt und später Fleißner-Schablone genannt. Es ist kein sicheres Verschlüsselungsverfahren: die Anzahl der Löcher in der Schablone kann ersehen werden; zum herauszufinden, welche Felder der Schablone ausgeschnitten sind, kann man eine Sprachanalyse durchführen (in der deutschen Sprache treten die Buchstabenpaare en, ch, ck, st, tz am häufigsten auf).

### Frage

*Wie viele verschiedene solcher optimalen Schablonen sind für ein $2n \times 2n$ Quadrat möglich?*

Man partitioniert das Quadrat in $n^2$ Teilmengen mit jeweils 4 Felder. Jede Teilmenge muss die Eigenschaft besitzen, dass sie invariant nach der Drehung um 90/80/270 Grad ist. Eine Teilmenge ist z.B. durch die vier Felder an den Ecken gegeben, eine andere durch die vier Felder in der Mitte. Die Schablone hat genau ein Loch in jeder Teilmenge: Da es für ein Loch 4 Möglichkeiten gibt, bekommt man $4^n$ verschiedene Möglichkeiten, eine solche Schablone herzustellen.

### Quellen


- `http://kryptografie.de/kryptografie/chiffre/fleissner.htm`
- `http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/Praktikum10-2/Gitter-Verfahren/Gitter-Verfahren.html`

# 31 Mozart - Das musikalische Würfelspiel (Computerexponat)

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Kombinatorik, Computerexponat |
| **Beschreibung** | Der Schüler würfelt 16 Mal mit zwei Würfeln und gibt die Augensummen in den Computer ein. Dadurch werden 16 Takte nach bestimmten Regeln ausgewählt und der Computer spielt einen Walzer. Tipp: Der Schüler kann sich die Augensummen (Zahlen von 2 bis 12) frei ausdenken. |

Das Programm, welches auf dem Computer abgespeichert ist, funktioniert wie folgt: Die einzelnen Takte sind in Form von Dateien auf dem Computer abgespeichert. Die einzelnen Takte werden dann mit Hilfe der unteren Takttabelle zu einer neuen Datei zusammengesetzt.
Man kann auch den Computer würfeln lassen: die Würfel werden durch einen Zufallsgenerator ersetzt.

### Historischer Hintergrund

Diese musikalische Würfelspiele, die ab dem Ende des 18. Jahrhunderts in Europa entstanden, waren zur Unterhaltung und zum Zeitvertreib gedacht. Mit ihnen konnte jeder zum Komponist werden, unter der Voraussetzung, das vorgegebene Instrument zu spielen und Noten lesen zu können. Ein anderer Zufallsgenerator für musikalische Spiele (nach Würfeln) waren Spielkarten.
Mozart produzierte das Würfelspiel des Exponats, welches original den Titel: „*Anleitung so viel Walzer oder Schleifer mit zwei Würfeln zu componiren so viel man will ohne musikalisch zu seyn noch etwas von der Composition zu verstehen* "(KV Anh. 294d) trägt.
Das Ziel der meisten musikalischen Würfelspiele ist es, ein gleichmäßiges und wohlklingendes Musikstück zu erzeugen. Deshalb wählte man für sie nach einem bestimmten Schema ablaufende Musikstile aus wie zum Beispiel einen Walzer oder ein Menuett.
Die meisten musikalischen Würfelspiele wurden für das Klavier geschrieben und waren bis Mitte des 19. Jahrhunderts sehr beliebt, bevor sie zeitweise verschwanden. Erst mit der neu aufkommenden elektronischen Rechentechnik Ende des 20. Jahrhunderts wurde diese Art von Komposition wiederentdeckt und zu automatisch generierten Musikstücken gemacht.

**Mathematik**

Die Komposition besteht aus 16 Takten, wobei das Stück in 2 Teile aufgeteilt ist. Der 8. und der 16. Takt sind die Schlusstakte der jeweiligen Teile.
Es wurde eine Grundkomposition geschrieben und ausgehend von dieser 10 Variationen komponiert und deren Takten durchnummeriert. Mit Hilfe des Würfels (und der unteren Tabelle) wird bestimmt, welcher Takt aus welcher Variation gespielt wird.

| | **I** | **II** | **III** | **IV** | **V** | **VI** | **VII** | **VIII** | **IX** | **X** | **XI** | **XII** | **XIII** | **XIV** | **XV** | **XVI** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2** | 96 | 22 | 141 | 41 | 105 | 122 | 11 | 30 | 70 | 121 | 26 | 9 | 112 | 49 | 109 | 14 |
| **3** | 32 | 6 | 128 | 63 | 146 | 46 | 134 | 81 | 117 | 39 | 126 | 56 | 174 | 18 | 116 | 83 |
| **4** | 69 | 95 | 158 | 13 | 153 | 55 | 110 | 24 | 66 | 139 | 15 | 132 | 73 | 58 | 145 | 79 |
| **5** | 40 | 17 | 113 | 85 | 161 | 2 | 159 | 100 | 90 | 176 | 7 | 34 | 67 | 160 | 52 | 170 |
| **6** | 148 | 74 | 163 | 45 | 80 | 97 | 36 | 107 | 25 | 143 | 64 | 125 | 76 | 136 | 1 | 93 |
| **7** | 104 | 157 | 27 | 167 | 154 | 68 | 118 | 91 | 138 | 71 | 150 | 29 | 101 | 162 | 23 | 151 |
| **8** | 152 | 60 | 171 | 53 | 99 | 133 | 21 | 127 | 16 | 155 | 57 | 175 | 43 | 168 | 89 | 172 |
| **9** | 119 | 84 | 114 | 50 | 140 | 86 | 169 | 94 | 120 | 88 | 48 | 166 | 51 | 115 | 72 | 111 |
| **10** | 98 | 142 | 42 | 156 | 75 | 129 | 62 | 123 | 65 | 77 | 19 | 82 | 137 | 38 | 149 | 8 |
| **11** | 3 | 87 | 165 | 61 | 135 | 47 | 147 | 33 | 102 | 4 | 31 | 164 | 144 | 59 | 173 | 78 |
| **12** | 54 | 130 | 10 | 103 | 28 | 37 | 106 | 5 | 35 | 20 | 108 | 92 | 12 | 124 | 44 | 131 |

Die Tabelle zeigt an, welchen Takt man auswählen muss: Sie besteht aus 11 Zeilen (die den Augensummen 2 bis 12 entsprechen) und aus 16 Spalten (die zu komponierende Takten).

Für jeden Takt stehen 11 Möglichkeiten zur Verfügung. Es handelt sich also um eine Variation mit Wiederholung. Es werden 16 Objekte aus 11 möglichen Objekten unter Beachtung der Reihenfolge ausgewählt, wobei Objekte auch mehrfach ausgewählt werden können. Nun ist es jedoch so, dass Mozart die Schlusstakte der beiden Teile des Musikstückes etwas modifiziert hat: Für den 8. Takt sieht er, egal welche Augensumme gewürfelt wird, immer den gleichen Takt und für den 16. Takt nur zwei Möglichkeiten vor. Die Zahlen in der Tabelle sind für diese Takte irrelevant. Die Rechnung sieht also folgendermaßen aus:

$$B_{11}^{14} \cdot 1 \cdot 2 = 11^{14} \cdot 2 = 759\,499\,667\,166\,482 \sim \ 760 \text{ Billionen.}$$

Jedes Stück, welches der Computer abspielt, ist mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit eine Uraufführung.

**Quellen**

- `https://mug.didaktik-graz.at/Files/Mathematikum/Mozart.pdf`

# 32 Mein Geburtstag in Pi (Computerexponat)

**Nur vorhanden mit umständlichen Wechsel beim Exponat „Knack den Code!“**

| | |
|---|---|
| **Themenbereich** | Zahlen |
| **Beschreibung** | Man gibt seinen Geburtstag oder eine andere 6-stellige Ziffernreihe in den Computer ein. Dieser zeigt einem dann, an welcher Stelle von der Kreiszahl $\pi$ die eingegebene Ziffernkombination zum ersten Mal vorkommt. Die ersten 10 Millionen Ziffern von $\pi$ sind eingespeichert und der Computer sucht lediglich nach dem ersten Auftreten der eingegebenen Folge. |

### Beispiele

Die Folge 000000 findet man erst nach 1699927 Stellen, wobei die Folge 999999 schon nach der 762-ten Stelle auftaucht.
Die erste Ziffernfolge in $\pi$, die einem Geburtstag entspricht, ist 23.07.81 (sie beginnt an der 63-ten Nachkommastelle).

### Mathematik

Die ersten Stellen von $\pi$ kennt wohl jeder schon aus dem Mathematikunterricht $\pi = 3.1415...$ In der Geschichte war es wichtig, mehrere Nachkommastellen von $\pi$ zu kennen und zu benutzen: dies machte den Fehler bei den praktischen Berechnungen kleiner (heutzutage hat ein Computer für die Berechnungen ausreichend Ziffern von $\pi$ zur Verfügung). Man kann (theoretisch) jede Ziffer nach dem Komma von $\pi$ berechnen und heute sind 22,4 Billionen Stellen bekannt.

Ist $\pi$ normal? Als *normale Zahl* wird in der Mathematik eine reelle Zahl bezeichnet, unter deren Nachkommaziffern für jedes $k \geqslant 1$ alle möglichen $k$-stelligen Ziffernblöcke mit gleichen asymptotischen relativen Häufigkeiten auftreten. Eine Zahl heißt also normal, wenn in ihrer Ziffernfolge jeder Ziffernblock vorkommt und Ziffernblöcke gleicher Länge gleich häufig auftreten. Übrigens sollte diese Eigenschaft für alle Basissysteme gelten, also nicht nur im Dezimalsystem.

Die Zahl $\pi$ wäre laut Definition dann normal, wenn beispielsweise die Ziffer 3 ein Zehntel aller Ziffern von $\pi$ darstellt. Gleiches müsste für alle übrigen Ziffern wie 1, 5 oder 7 gelten. Aber normal sein bedeutet noch mehr: Eine Abfolge aus zwei Ziffern - zum Beispiel 28 - sollte man in einem Hundertstel aller Fälle finden; eine Abfolge aus drei Ziffern in einem Tausendstel aller Fälle - und so weiter.
Es wurde noch nicht bewiesen, dass $\pi$ normal ist aber in den ersten 22,4 Billionen Nachkommastellen ließ sich die Normalität beweisen.

Wäre $\pi$ tatsächlich normal, könnte man sich jede beliebig lange Zahlenfolge ausdenken und sie irgendwo in $\pi$ finden (und das sogar unendlich oft).
Schreibt man $\pi$ in das Binärsystem um, könnte man den Text jedes Buches, den man in solch eine Zahlenfolge kodiert hat, irgendwo in den Nachkommastellen von $\pi$ wiederfinden. Alles Erdenkliche wäre also irgendwo in $\pi$ auffindbar.

### Quellen


- `http://scienceblogs.de/astrodicticum-simplex/2017/03/14/die-zahl-pi-koennte-normal-sein-und-das-ist-definitiv-nicht-normal/`
- `http://www.faz.net/aktuell/wissen/pi-tag-ist-die-zahl-pi-aus-mathematischer-sicht-normal-1951333-p2.html`
- Ziffernfolgen in Pi wiederfinden: `http://pi.gerdlamprecht.de`
- `https://www.welt.de/wissenschaft/article153246317/Wofuer-brauchen-wir-eigentlich-die-Zahl-Pi.html`

# 33 Knack den Code! (Computerexponat)

| Themenbereich | Kryptographie |
|---|---|
| **Beschreibung** | Ein verschlüsselter Text (wo die Buchstaben einfach permutiert sind) soll geknackt werden. Schnell entwickelt man Tricks, wie man am besten beim Entschlüsseln vorgeht. Korrekt erratene Buchstaben werden überall eingefügt und ermöglichen so die gesamte Entschlüsselung des Textes. |

### Hinweise

Buchstabenhäufigkeit der ausgewählten Sprache (u.a. Anfangsbuchstaben und Endbuchstaben) beachten. In deutschsprachigen Texten kommt der Buchstabe E am häufigsten vor, danach folgen die Buchstaben N,I,S,R,A,T,D. Buchstabenfolgen, wie SCH oder Doppelkonsonanten, können auch beim Entschlüsseln weiterhelfen.

### Historischer Hintergrund

Das Ziel der Kryptographie ist die Übermittlung von Nachrichten, die für alle sichtbar, aber dennoch nur für den Empfänger verständlich sind. Die Geschichte der Kryptographie ist wie ein Ping-Pong-Spiel zwischen Geheimcodes entwickeln und Geheimcodes knacken.
Der einfache Trick, auf die Buchstabenhäufigkeit zu achten, wurde erst im Mittelalter entdeckt. Ab diesem Zeitpunkt waren bestimmte Verschlüsselungsverfahren plötzlich nicht meht benutzbar.

### Mathematik

In diesem Exponat werden die 26 Buchstaben des Alphabets permutiert: die Anzahl der Permutationen ist $26! \sim 10^{26}$ (Vorsicht: $n!$ wächst deutlich schneller als $10^n$, der Exponent war hier ein Zufall). Beim Cäsar-Code hatte man nur zyklische Permutationen (die Buchstaben werden einfach verschoben), und es gibt lediglich 26 solcher Permutationen (bestimmt vom Bild des Buchstaben A).